Lycée Pilote de L'Ariana 13– 05– 010	MATHEMATIQUES Synthèse 3	$4^{ème}$ Math Durée : 4 heures

Exercice 1 : (3points)

Une voiture est achetée à 30000 dinars. Le prix de revente y, exprimé en dinars, est donné en fonction du nombre x d'années d'utilisation

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	30000	24000	19200	15360	12290	9830

1) a) Calculer cov (x , y) . Interpréter le résultat.
   b) Est –il judicieux de faire un ajustement affine ?
   c) Donner une équation de la droite D de régression de y en x selon la méthode des moindres carrés.
2) On pose z = ln (y)
   Une équation de la droite de régression de z en x est donnée par : z = - 0,22 x + 10,31.
   a) Déterminer une expression de y en fonction de x .
   b) Déterminer après combien d'années d'utilisation le prix de revente devient inférieur ou égal à 5000 dinars.
3) Après 6 années d'utilisation le prix de revente d'une voiture est de 7800 dinars.
   Des deux ajustements précédents, quel est celui qui semble le mieux estimer le prix de revente après 6 années d'utilisation ? Justifier votre réponse.

Exercice 2 : (4 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soit A (6, 0, 0) , B (0, –6, 0) et C (0, 0, 3) et soit S la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - x + y - 2z = 12$

1) a) Déterminer une équation du plan P passant par A, B et C.
   b) Déterminer le centre I de S et calculer son rayon.
   c) Montrer que S et P sont sécants suivant un cercle dont on déterminera le centre H et le rayon.
2) a) Vérifier que le point K (–1, 1, –2) est un point de S.
   b) Déterminer une équation du plan Q tangent à S en K
   c) Vérifier que P et Q sont parallèles.
3) Soit h une homothétie de centre I qui transforme P en Q.
   a) Montrer que h à pour rapport –3.
   b) Déterminer une équation de la sphère S' image de S par h.

Exercice 3 : (3.5 points)

Un feu de passage piéton reste 60 secondes au vert, temps pendant lequel un piéton peut traverser. Puis il reste 60 secondes au rouge, temps pendant lequel un piéton ne peut pas traverser.

Dans l'exercice, on ne s'intéresse qu'aux seuls piétons qui se présenteraient pour traverser à ce feu entre 8 h 00 et 8 h 05.

À 8 h 00, ce feu se met au vert. On appelle T la variable aléatoire qui donne, en secondes, le temps écoulé entre 8 h 00 et l'heure d'arrivée devant ce feu d'un piéton qui souhaite traverser. On admet que T suit une loi uniformément répartie sur l'intervalle [0 ; 300].

1) a) Calculer $p(60 \le T \le 80)$ et $p(180 \le T \le 200)$
   b) En déduire la probabilité pour qu'un piéton attende plus de 40 secondes
2) Montrer que la probabilité pour qu'un piéton attende moins de 10 secondes est égal à $\frac{2}{3}$
3) Entre 8 h 00 et 8 h 05, 12 piétons se présentent à ce feu.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre de piétons ayant attendus moins de 10 secondes.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Calculer le nombre moyen de piétons ayant attendus moins de 10 secondes.

Exercice 4 : (3.5 points)

Pour chaque question une seule des trois propositions est exacte. Indiquer la bonne réponse :

A) le plan est rapporté à un repère orthonormé (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$)

1) Une équation de l'hyperbole H de centre O , de sommet S(3 , 0) et de foyer F(5 , 0) est :

a) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ b) $-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ c) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

2) La parabole de foyer F(2,0) et de directrice D : x = – 4 a pour équation :

a) $y^2 - 4 = 4x$ b) $x^2 = 8(y+1)$ c) $y^2 - 12 = 12x$

B)

La durée de vie d'une machine est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$.
Sachant que la probabilité que l'appareil tombe en panne avant la fin de la première année est 0.18

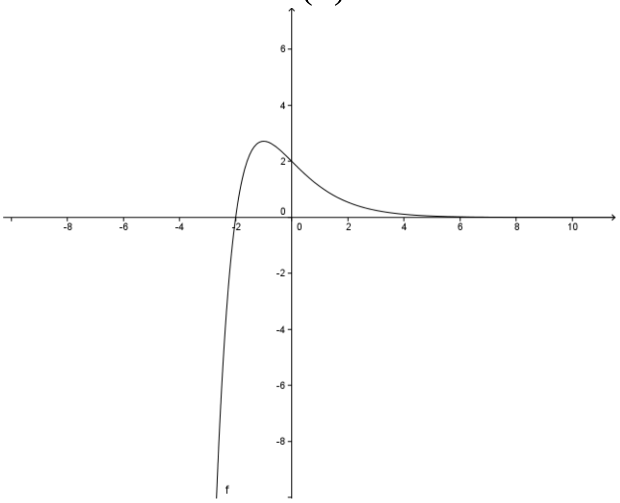
Alors a) $\lambda = \ln(\frac{50}{41})$ b) $\lambda = \ln(\frac{41}{50})$ c) $\lambda = \ln(\frac{50}{9})$

C) Si f est une solution de l'équation différentielle y'' + 9 y = 0 telle que f(0) = 0

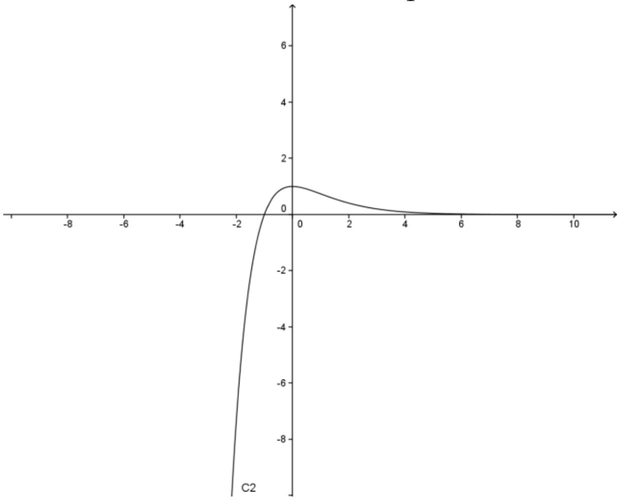
Alors a) f est paire b) f est impaire c) f est ni paire ni impaire

D/On a représenté ci-dessous la courbe représentative (C), d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.
La courbe (C) passe par le points A(0;2)etC(-2;0) elle admet une tangente horizontale au point d'abscisse -1
Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une représente la fonction dérivée f ' de f et une autre représente une primitive F de f sur IR.

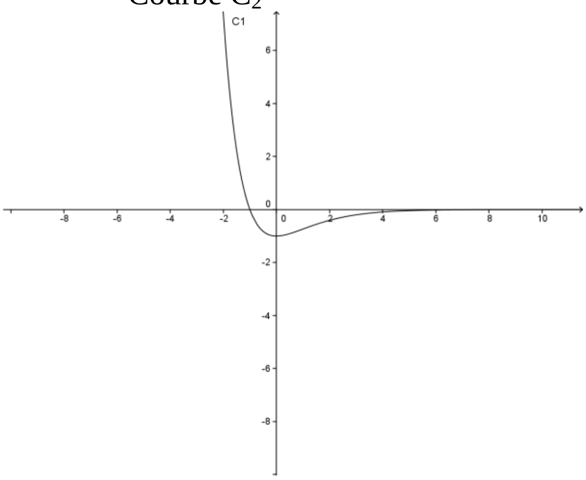
Courbe (C) de f



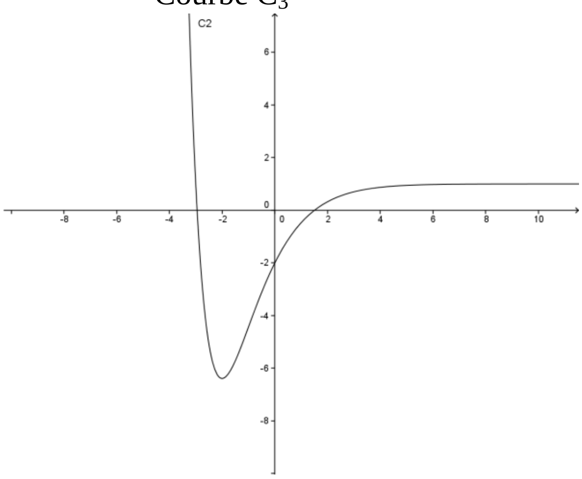
Courbe C_1



Courbe C_2



Courbe C_3



1) La courbe représentative de f ' est : a) C_1 b) C_2 c) C_3
2) La courbe représentative de F est : a) C_1 b) C_2 c) C_3
3) L'aire A de la partie hachurée est telle que : a) $3 \le A \le 4$ b) $4 \le A \le 5$ c) $5 \le A \le 6$

Exercice 5 :(6 points)

Soit f la fonction définie sur [0,1] par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x-1}{\ln x} \ , \ si\, x \in]0,1[\\ f(0) = 0 \ \ et \ \ f(1) = 1 \end{cases}$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.

2) Soit x un réel appartenant à] 0 , 1[et g la fonction définie sur] 0 , +∞[par :

$$g(t) = \frac{x-1-\ln(x)}{(x-1)\ln x}(t-1)\ln(t) - t + 1 + \ln(t)$$

a)Montrer qu'il existe un réel $\alpha \in]\, x\, , 1[$ tel que $g'(\alpha) = 0$.

b) En déduire que $\dfrac{x-1-\ln(x)}{(x-1)\ln x} = \dfrac{\alpha-1}{\alpha-1+\alpha\ln(\alpha)}$

c) Prouver alors que f est dérivable à gauche en 1 et que $f'(1) = \frac{1}{2}$

d) On donne le tableau de variation de f ci-dessous :

x	0		1
f '(x)	‖	+	
f	0	↗	1

Tracer la courbe de f

3) Interpréter graphiquement le réel $I = \int_0^1 f(t)\,dt$

4) Soit F la fonction définie sur]0,1] par $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{f(t)}{t}\,dt$

a) Montrer que F est dérivable sur]0,1] et que $F'(x) = f(x)$

b) En déduire que $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$

5) a) Montrer que, pour tout $t > 0$, $\ln t \leq t - 1$

b) En déduire que, pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leq f(t) \leq 1$

c) Prouver alors que, pour tout $x \in]0,1]$, $0 \leq I + F(x) \leq x$.

6) a) Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$, $\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t} = \ln 2$.

b) Prouver alors que, pour tout $x \in]0,1[$, $0 \leq F(x) + \ln 2 \leq \dfrac{x^2 - x}{\ln x}$

c) En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x)$.

7) Prouver finalement I = ln2.

MR: LATRACH — Synthèse III 2010

Exercice 1

1) a) COV(x,y) et interpretation

* $COV(X,Y) = \overline{XY} - \bar{X}\,\bar{Y}$

$= -11651,6$

* $COV(X,Y) < 0 \Rightarrow$ x et y varient dans le sens contraire.

b) Ajustement affine

$r = -0,98$; $|r| > \frac{\sqrt{3}}{2}$

Alors un ajustement affine est légitime.

c) Equation de la droite de regression

$D : y = 28433,8 - 3994,8x$.

2) a) Expression de y en x.

$y = e^{-0,22x + 10,31}$

b) nbre d'années

$y < 5000 \Leftrightarrow e^{-0,22x+10,31} \leq 5000$

$\Rightarrow x \geq 8,14$

$\Rightarrow x = 9$.

ccl : Après 9 ans le prix de revenue est inferieur à 5000

3) Comparaison des deux ajustements

Avec le 1er Ajustement : $y = 4464$

Avec le 2ème " $y = 8022$.

Comme le prix de revenue est 7800DT

Alors le 2ème Ajustement est plus fiable.

Exercice 2

1) a) Equation du plan (ABC)

$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \Rightarrow \vec{n}\begin{pmatrix}-18\\18\\-36\end{pmatrix}$

d'où $(ABC) : x - y + 2z - 6 = 0$

b) Elements caract de S

$I\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$; $R = \frac{3}{2}\sqrt{6}$.

c) Positions Relatives de S et P

$d(I,P) = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2} < R$.

$\Rightarrow S \cap P = \mathcal{C}(H, r)$.

$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{IH} = \alpha\vec{n}\\ H \in P\end{array}\right\} \Rightarrow H(1,-1,2)$

$r = \sqrt{R^2 - d^2} = 2\sqrt{3}$.

2) a) $K \in S$?

$(-1)^2 + (1)^2 + (-2)^2 + 1 + 1 + 4 = 12$.

$\Rightarrow K \in S$.

b) Equation du plan Q.

$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{IK} \text{ vecteur normal à } Q.\\ K \in Q\end{array}\right.$

$\Rightarrow M \in Q \Leftrightarrow \overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{IK} = 0$

D'où $Q : x - y + 2z + 6 = 0$

c) Parallelisme de P et Q

$\vec{n}_P = \vec{n}_Q \Rightarrow P \parallel Q$.

3) a) Rapport de h.

on a : I, K, H alignés

car $\left.\begin{array}{l}(IK) \perp Q\\ P \parallel Q\end{array}\right\} \Rightarrow (IK) \perp P$

or $(IH) \perp P$

$\Rightarrow (IK) \parallel (IH)$

$\Rightarrow$ I, K, H alignés

Comme $h(P) = Q$

$\Rightarrow h(H) = K$

$\Rightarrow \overrightarrow{IK} = k\,\overrightarrow{IH} \Rightarrow k = -3$

b) Equation de $S' = h(S)$

$h(S)$ est la sphère de centre $I = h(I)$ et de rayon $R' = |-3| R$.

CCl : $(x-\frac{1}{2})^2 + (y+\frac{1}{2})^2 + (z-1)^2 = R'^2$

Exercice 3.

1) a) Calcul de $p(60 \leq T \leq 80)$ et $p(180 \leq T \leq 200)$

* $p(60 \leq T \leq 80) = \frac{1}{15}$

$p(180 \leq T \leq 200) = \frac{1}{15}$

b) p = probabilité $T \geq 40$

V V V

0 60 R 120 180 R 240 300

$p = p(60 < T < 80) + p(18 < T < 200)$

$= \frac{2}{15}$

2) q = probabilité $T \leq 10$.

$q = p(0 \leq T \leq 60) + p(110 < T < 180)$

$+ p(230 \leq T \leq 300)$

$= \frac{60 + 70 + 70}{300} = \frac{200}{300}$

$= \frac{2}{3}$

3). a) Loi de Probabilité de X :

X suit une loi de Binomiale de paramètre $n = 12$ et $p = \frac{2}{3}$

$p(X = k) = C_{12}^{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{12-k}$

$k \in \{0, 1, 2, ---, 12\}$

b) Nbre moyen de Piétons.

$N = E(X)$

$= 12 \times \frac{2}{3}$

$= 8.$

Exercice 4.

Parties	A		B	C	D		
Questions	1	2			1	2	3
Rep	a	c	a	b	b	c	b

Exercice 5

1) Continuité et dérivabilité de f à

* $\lim_{0^+} f(x) = \lim_{0^+} \frac{1}{\frac{\ln x}{x-1}} = 1 = f(0)$

$\Rightarrow f$ est $\mathcal{C}$ en 0^+

* $\lim_{0^+} \frac{f(x) - 1}{x - 0} = \lim_{0^+} \frac{x-1}{x \ln x} = +\infty$

$\Rightarrow f$ n'est pas d en 0^+.

2) Existence de α tq $g'(\alpha) = 0$

$\begin{cases} \cdot\ g \text{ continue sur } [x, 1] \\ \cdot\ g \text{ dérivable sur }]x, 1[\\ \cdot\ g(x) = g(1) = 0 \end{cases}$

$\xRightarrow{\text{Rolle}} \exists \alpha \in]x, 1[$ tq $g'(\alpha) = 0$

b) Déduction.

$g'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{x - 1 - \ln x}{(x-1)\ln x} = \frac{\alpha - 1}{\alpha - 1 + \alpha \ln(\alpha)}$

c) Dérivabilité de f en 1^-

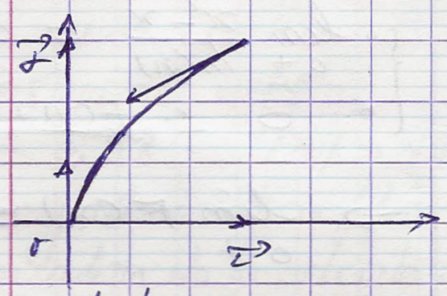
$\lim_{1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{1^-} \frac{x - 1 - \ln x}{(x-1)\ln x}$

$= \lim_{\alpha \to 1} \frac{\alpha - 1}{\alpha - 1 + \alpha \ln \alpha}$

$$= \lim_{\alpha \to 1^-} \frac{1}{1+\alpha \frac{\ln \alpha}{\alpha - 1}}$$

$$= \frac{1}{2} \quad \text{car} \lim_{\alpha \to 1} \frac{\ln(\alpha)}{\alpha - 1} = 1.$$

2). Courbe de f :



3). Interprétation graphique de I

I (en u a) est l'aire de la partie du plan limitée par la Courbe $\mathcal{C}$ de f et les droites d'équations $x=0$, $x=1$ et $y=0$

4). a) Dérivabilité de F

• f est continue sur $[0,1]$

Soit G une primitive de $t \mapsto f(t)/t$ sur $]0,1]$

Alors $F(x) = G(x^2) - G(x)$

$\begin{cases} * \ x \mapsto x^2 \text{ est } d \text{ sur }]0,1] \\ * \ G \text{ est } d \text{ sur }]0,1] \\ \cdot \ \forall x \in]0,1]; \ x^2 \in]0,1] \end{cases}$

$\Rightarrow$ F est dérivable sur $]0,1]$

et on a: $F'(x) = 2x\, G'(x^2) - G'(x)$

$$= 2x \cdot \frac{f(x^2)}{x^2} - \frac{f(x)}{x}$$

$$= 2 \cdot \frac{f(x^2)}{x} - \frac{f(x)}{x}$$

$* \ x = 1$; $F'(1) = 1$

$* \ x \neq 1$; $F'(x) = 2 \cdot \frac{x^2-1}{2\ln x \cdot x} - \frac{x-1}{x \ln x}$.

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{x^2 - x}{x \ln x}$$

$$= \frac{x-1}{\ln x}$$

$$= f(x)$$

ccl: $F'(x) = f(x)$, $x \in]0,1]$

b). Déduction: $F(x) = \int_1^x f(t)dt$

$\cdot \int_1^x f(t)\,dt = \int_1^x F'(t)\,dt$

$$= F(x) - F(1)$$

$$= F(x); \ (F(1) = 0)$$

5) a) $t > 0$; $\ln(t) \leq t - 1$

Soit $\varphi(t) = \ln(t) - t + 1$

φ d sur $]0,+\infty[$; $\varphi'(t) = \frac{1-t}{t}$

$\left. \begin{array}{l} \cdot \ t > 1 \\ \ \ \varphi \downarrow \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi(t) \leq \varphi(1)$

$\left. \begin{array}{l} \cdot \ t \in]0,1] \\ \ \ \varphi \nearrow \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi(t) \leq \varphi(1)$

D'où $\varphi(t) \leq \varphi(1)$; $\forall t > 0$

$\Rightarrow \ln(t) \leq t - 1$; $t > 0$.

b). $\forall t \in [0,1]$; $0 \leq f(t) \leq 1$

$\left. \begin{array}{l} \cdot \ 0 \leq t \leq 1 \\ \cdot \ f \text{ est } \nearrow \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) \leq f(t) \leq f(1)$

$$\Rightarrow 0 \leq f(t) \leq 1$$

c) $x \in]0,1]$, $0 \leq I + F(x) \leq x$?

$* \quad 0 \leq f(t) \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^x f(t)dt \leq \int_0^1 x$

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 f(t)dt + \int_1^x f(t)dt \leq x$

$\Rightarrow \quad 0 \leq I + F(x) \leq x.$

6). a) Calcul de $\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}$.

$$\int_x^{x^2} \frac{\frac{1}{t}}{\ln(t)}\,dt = \Big[\ln|\ln(t)|\Big]_x^{x^2}$$

$$= \ln\left(\left|\frac{\ln(x^2)}{\ln(x)}\right|\right)$$

$$= \ln\left(\frac{2\ln x}{\ln x}\right)$$

$$= \ln(2).$$

b) $x \in]0,1[\,;\ 0 \leq F(x) + \ln(2) \leq \frac{x^2 - x}{\ln(x)}$

$$F(x) + \ln(2) = \int_x^{x^2} \frac{f(t)}{t} - \frac{1}{t\ln(t)}\,dt$$

$$= \int_x^{x^2} \frac{t-1}{t\ln(t)} - \frac{1}{t\ln t}\,dt$$

$$= \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,dt.$$

$*\quad x^2 \leq t \leq x < 1$

$\Rightarrow \ln(x^2) \leq \ln(t) \leq \ln(x)$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{\ln(t)} \geq \frac{1}{\ln(x)}.$

$\Rightarrow \frac{1}{\ln(x)} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq 0.$

$$\Rightarrow \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(x)}\,dt \leq \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(t)}\,dt \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,dt \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln x}\,dt$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq F(x) + \ln(2) \leq \frac{x^2 - x}{\ln(x)}. \\ \text{pour tout } x \in]0,1[. \end{cases}$$

c). $\lim\limits_{0^+} F(x)$?

$$\begin{cases} \cdot \lim\limits_{0^+} \frac{x^2 - x}{\ln(x)} = 0 = \lim 0 \\ \cdot \quad 0 \leq F(x) + \ln(2) \leq \frac{x^2 - x}{\ln(x)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{0^+} F(x) = -\ln(2).$$

7). Valeur de I.

$$\begin{cases} * \ 0 \leq I + F(x) \leq x \\ * \ \lim 0 = \lim\limits_{0^+} x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad I = -\lim_{0^+} F(x)$$

$$= \ln(2)$$

ccl: $\quad I = \ln(2)$